DE LA RAMIFICATION AUX SOUS-GROUPES CANONIQUES

YICHAO TIAN

Soient $\mathscr{O}_K$ un anneau de valuation discrète complet de corps résidel k de caractéristique $p > 0$, $\pi \in \mathscr{O}_K$ une uniformisante, K son corps des fractions, $\overline{K}$ une clôture séparable de K, $\mathscr{O}_{\overline{K}}$ l'anneau des entiers de $\overline{K}$. On note v la valuation sur $\overline{K}$ normalisée par $v(\pi) = 1$, et $\mathscr{G}_K$ le groupe de Galois de $\overline{K}$ sur K. Pour tout $a \in \mathbb{Q}_{>0}$, on note $\mathfrak{m}_a = \{x \in \mathscr{O}_{\overline{K}}; v(x) \geq a\}$. Si K est de caractéristique 0, on note e l'indice de ramification absolu de K, et v_p la valuation sur $\overline{K}$ normalisée par $v_p(p) = 1$, *i.e.* on a $v(x) = ev_p(x)$ pour $x \in \overline{K}$. Pour un schéma en groupes G et un entier $n \geq 1$, on note $G[n]$ le noyau de la multiplication par n sur G.

A partir de la section 2, on suppose K de caractéristique 0 et k parfait.

1. Filtration d'Abbes-Saito pour les schémas en groupes finis plats sur $\mathscr{O}_K$

1.1. Soient $\mathbf{ASF}_{\mathscr{O}_K}$ la catégorie des $\mathscr{O}_K$-algèbres syntomiques (*i.e.* plates et localement d'intersection complète) finies et génériquement étales, $\mathbf{Ens}_{\mathscr{G}_K}$ la catégories des ensembles finis munis d'une action continue de $\mathscr{G}_K$. On a le foncteur fibre

$$\mathscr{F} : \mathbf{ASF}_{\mathscr{O}_K} \longrightarrow \mathbf{Ens}_{\mathscr{G}_K}$$

qui associe à un objet A de $\mathbf{ASF}_{\mathscr{O}_K}$ l'ensemble $(\operatorname{Spec} A)(\overline{K})$ muni de l'action naturelle de $\mathscr{G}_K$. On définit une filtration du foncteur fibre $\mathscr{F}$ comme suit. Pour tout objet A de $\mathbf{ASF}_{\mathscr{O}_K}$, on choisit un plongement

$$i : \operatorname{Spf}(A) \hookrightarrow \mathfrak{X} = \operatorname{Spf}(\mathscr{A}),$$

où $\mathscr{A} = \mathscr{O}_K < X_1, \cdots, X_d >$, le complété p-adique de l'anneau des polynômes à d variables sur $\mathscr{O}_K$. Soit I l'idéal de i. Pour tout $a = m/n \in \mathbb{Q}_{>0}$, on pose $\mathfrak{X}^a = \operatorname{Spf}(\mathscr{A} < I^n/\pi^m >)$. C'est un schéma formel topologiquement de type fini sur $\mathscr{O}_K$ dont la fibre générique à la Raynaud $\mathfrak{X}^a_K$ est un sous-domaine affinoïde du disque unité rigide de dimension d. On appelle $\mathfrak{X}^a_K$ le a-ième voisinage tubulaire de $\operatorname{Spf}(A)$ dans $\mathfrak{X}_K$. On peut montrer que l'ensemble des composantes géométriques connexes de l'espace affinoïde $\mathfrak{X}^a_K$ pour la G-topologie, noté $\pi_0(\mathfrak{X}^a_{\overline{K}})$, ne dépend pas du choix du plongement i [AS02, 3.1]. Pour des nombres rationels $b > a > 0$, on a $\operatorname{Spec}(A)(\overline{K}) \subset \mathfrak{X}^b_K(\overline{K}) \subset \mathfrak{X}^a_K(\overline{K})$. On obtient donc pour tout $a \in \mathbb{Q}_{>0}$ un foncteur

$$\mathscr{F}^a : \mathbf{ASF}_{\mathscr{O}_K} \longrightarrow \mathbf{Ens}_{\mathscr{G}_K}$$

donné par $A \mapsto \pi_0(\mathfrak{X}^a_{\overline{K}})$. On a des morphismes nautrels de foncteurs $\phi_a : \mathscr{F} \to \mathscr{F}^a$ et $\phi_{b,a} : \mathscr{F}^b \to \mathscr{F}^a$ pour $b > a$, tels que $\phi_a = \phi_{b,a} \circ \phi_b$ et $\phi_{c,a} = \phi_{b,a} \circ \phi_{c,b}$ pour $c > b > a$.

Pour tout nombre réel $a > 0$, on pose

$$\mathscr{F}^{a-}(A) = \varprojlim_{0<b<a} \mathscr{F}^b(A) \qquad \mathscr{F}^{a+}(A) = \varinjlim_{b>a} \mathscr{F}^b(A).$$

Proposition 1.2. ([AS02, 6.2 et 6.4]) *Soit A un objet de $\mathbf{ASF}_{\mathscr{O}_K}$. Alors*

(i) *pour tout $a \in \mathbb{Q}_{>0}$, $\mathscr{F}(A) \to \mathscr{F}^a(A)$ est surjectif;*

(ii) *le morphisme naturel $\mathscr{F}(A) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{a \in \mathbb{Q}_{>0}} \mathscr{F}^a(A)$ est une bijection;*

(iii) *pour tout $a \in \mathbb{Q}_{>0}$, on a $\mathscr{F}(A) = \mathscr{F}^{a-}(A)$, et pour tout nombre irrationel $a > 0$, on a $\mathscr{F}^{a-}(A) = \mathscr{F}^{a+}(A)$.*

1.3. Soient $G = \mathrm{Spec}(A)$ un schéma en groupes fini, plat et génériquement étale sur $\mathscr{O}_K$, et $a \in \mathbb{Q}_{>0}$. La structure de groupe sur G induit une structure de groupe sur $\mathscr{F}^a(A)$, et le morphisme naturel $G(\overline{K}) = \mathscr{F}(A) \to \mathscr{F}^a(A)$ est un homomorphisme de groupes. Donc le noyau $G^a_{AS}(\overline{K}) = \mathrm{Ker}(G(\overline{K}) \to \mathscr{F}^a(A))$ est invariant sous l'action de $\mathscr{G}_K$, et il définit un sous-schéma en groupes fermé $G^a_{AS,K}$ de la fibre générique $G \otimes K$. L'adhérence schématique de $G^a_{AS,K}$ dans G, notée G^a_{AS}, est un sous-schéma en groupes fermé de G fini et plat sur $\mathscr{O}_K$. Posons $G^0 = G$. On obtient donc une filtration décroissante et séparée $(G^a_{AS}, a \in \mathbb{Q}_{\geq 0})$ de G par des sous-schémas en groupes fermés finis et plats sur $\mathscr{O}_K$. On l'appelle *filtration d'Abbes-Saito*. Pour tout nombre réel $a \geq 0$, on pose $G^{a+}_{AS} = \bigcup_{b \in \mathbb{Q}_{>a}} G^b$.

Proposition 1.4. *Soit $f : G \to H$ un morphisme de schémas en groupes finis, plats et génériquement étales sur $\mathscr{O}_K$.*

(i) *L'homomorphisme f induit un homomorphisme canonique $f^a : G^a_{AS} \to H^a_{AS}$. Si f est plat et surjectif, alors $f^a(\overline{K}) : G^a_{AS}(\overline{K}) \to H^a_{AS}(\overline{K})$ est surjectif.*

(ii) *Le sous-groupe G^{0+}_{AS} est la composante connexe neutre de G.*

(iii) *Soient $(\mathscr{G}^a_K, a \in \mathbb{Q}_{\geq 0})$ la filtration de ramification définie par Abbes-Saito dans* [AS02, 3.4]. *Alors pour tout $a > 0$, $\mathscr{G}^a_K$ agit trivialement sur $G(\overline{K})/G^a_{AS}(\overline{K})$. En particulier, le $\mathscr{G}_K$-module $G(\overline{K})/G^{1+}_{AS}(\overline{K})$ est modéré.*

(iv) *Soient L/K une extension de corps de valuation discrète complet (pas nécessairement finie) d'indice de ramification fini $e_{L/K}$, $\mathscr{O}_L$ l'anneau des entiers de L, $\overline{L}$ une clôture séparable de L contenant $\overline{K}$, $G_L = G \otimes_{\mathscr{O}_K} \mathscr{O}_L$. Alors on a $G^{ae_{L/K}}_{L,AS} \simeq G^a_{AS} \otimes_{\mathscr{O}_K} \mathscr{O}_L$ pour tout $a \geq 0$.*

Démonstration. L'énoncé (i) est [AM04, 2.3.2]. Pour (ii), voir [AM04, 2.3.5]. L'énoncé (iii) est une conséquence directe de la définition de la filtration d'Abbes-Saito et du fait que $\mathscr{G}_K/\mathscr{G}^a_K$ est le groupe de Galois associé au foncteur $\mathscr{F}^a$ sur une certaine catégorie galoisienne [AS02, Section 3]. Pour (iv), voir [AM04, 2.1.5]. □

Remarque 1.5. Si $f : G \to H$ est surjectif et plat, l'énoncé (i) de la proposition implique que le morphisme induit sur les fibres générique $f^a \otimes K : G^a_{AS,K} \to H^a_{AS,K}$ est surjectif et plat, mais on fait attention que $f^a : G^a_{AS} \to H^a_{AS}$ n'est pas forcément plat en général.

Exemple 1.6. Supposons K de caractéristique 0. Soient $\mathscr{E}$ une courbe elliptique sur $\mathscr{O}_K$, $G_i = \mathscr{E}[p^i]$ le noyau de la multiplication par p^i sur $\mathscr{E}$ pour $i \geq 1$. D'après [Ka73, 3.6], il existe un paramètre X du groupe formel associé à $\mathscr{E}$ tel que la multiplication par p sur $\mathscr{E}$ soit donnée par

$$[p](X) = pX + \alpha X^p + \sum_{m=2}^{p} c_m X^{m(p-1)+1} + c_{p+1} X^{p^2} + \sum_{m \geq p+2} c_m X^{m(p-1)+1},$$

où $v_p(c_{p+1}) = 0$ et $v_p(c_m) \geq 1$ sauf $m \equiv 1 \mod p$. Posons $w = v_p(\alpha) \geq 0$. En utilisant le polygone de Newton, on trouve la filtration d'Abbes-Saito de G_1 comme suit :

(a) Si $w \geq p/(p+1)$, alors

$$G_{1,AS}^a = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a > ep^2/(p^2-1), \\ G_1 & \text{si} \quad a \leq ep^2/(p^2-1). \end{cases}$$

(b) Si $0 \leq w < p/(p+1)$, alors

$$G_{1,AS}^a = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a > e(p-w)/(p-1), \\ C & \text{si} \quad epw/(p-1) < a \leq e(p-w)/(p-1), \\ G_1 & \text{si} \quad 0 \leq a \leq pw/(p-1), \end{cases}$$

où C est un sous-schéma en groupes fermé de G_1 fini et plat sur $\mathscr{O}_K$ de rang p.

De même pour G_2, on a

(a) Si $w \geq p/(p+1)$, alors

$$G_{2,AS}^a = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a > e + ep^2/(p^2-1), \\ G_1 & \text{si} \quad ep^2/(p^2-1) < a \leq e + ep^2/(p^2-1), \\ G_2 & \text{si} \quad 0 \leq a \leq ep^2/(p^2-1). \end{cases}$$

(b) Si $1/(p+1) \leq w < p/(p+1)$, alors

$$G_{2,AS}^a = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a > e + e(p-w)/(p-1), \\ C & \text{si} \quad e + epw/(p-1) < a \leq e + e(p-w)/(p-1), \\ G_1 & \text{si} \quad e(p-w)/(p-1) < a \leq e + epw/(p-1), \\ D & \text{si} \quad epw/(p-1) < a \leq e(p-w)/(p-1), \\ G_2 & \text{si} \quad 0 \leq a \leq epw/(p-1), \end{cases}$$

où D est l'image inverse de C par la projection $G_2 \to G_1$ induite par la multiplication par p.

(c) Si $0 \leq w < e/(p+1)$, alors

$$G_{2,AS}^a = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a > e + e(p-w)/(p-1), \\ C & \text{si} \quad e(p-w)/(p-1) < a \leq e + e(p-w)/(p-1), \\ C_2 & \text{si} \quad e(p^2+p-1)w/(p-1) < a \leq e(p-w)/(p-1), \\ D & \text{si} \quad epw/(p-1) < a \leq e(p^2+p-1)w/(p-1), \\ G_2 & \text{si} \quad 0 \leq a \leq epw/(p-1), \end{cases}$$

où C_2 est un sous-groupe fermé de G_2 fini plat de rang p^2 tel que $C_2(\overline{K})$ soit libre de rang 1 sur $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ et $C_2(\overline{K}) \cap G_1(\overline{K}) = C(\overline{K})$, D est l'image inverse de C par la projection naturelle $G_2 \to G_1$. Si $w > 0$ (*i.e.* dans le cas supersingulier), alors le groupe de Barsotti-Tate associé à $\mathscr{E} \otimes k$ est de pente $1/2$; en particulier, on a $F_{\mathscr{E}}^2 = p$, où $F_{\mathscr{E}}^2 : \mathscr{E} \otimes k \to (\mathscr{E} \otimes k)^{(p^2)}$ est le 2-ième itéré de Frobenius. On verra plus tard que $C_2 \otimes k$ coïncide avec le noyau de $F_{\mathscr{E}}^2 = p$, *i.e.* $G_1 \otimes k$. Donc le noyau de la multiplication par p sur C_2 n'est pas plat sur $\mathscr{O}_K$!

2. Filtration par les groupes de congruence

On suppose désormais K de caractéristique 0 et k parfait.

2.1. Filtration de ramification naïve inférieure. Soient G un schéma en groupes fini et plat sur $\mathscr{O}_K$, $a \in \mathbb{Q}_{>0}$. Suivant L. Fargues [Far09, 4.1.1], on pose

$$G^a_{\mathrm{rn}}(\overline{K}) = \mathrm{Ker}(G(\mathscr{O}_{\overline{K}}) \to G(\mathscr{O}_{\overline{K}}/\mathfrak{m}_a)).$$

C'est un sous-groupe de $G(\overline{K}) = G(\mathscr{O}_{\overline{K}})$ invariant sous l'action de $\mathscr{G}_{\overline{K}}$. Il donc correspond à un sous-schéma en groupes de $G \otimes K$. On désigne par G^a_{rn} son adhérence schématique dans G. Posons $G^0 = G$. On obtient ainsi une filtration décroissante $(G^a_{\mathrm{rn}}, a \in \mathbb{Q}_{\geq 0})$ de G par des sous-schémas en groupes finis et plats sur $\mathscr{O}_K$. On l'appelle *filtration de ramification inférieure naïve* de G.

Supposons $G = \mathrm{Spec}(A)$ et notons $G^D = \mathrm{Spec}(A^*)$ avec $A^* = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_K-\mathrm{mod}}(A, \mathscr{O}_K)$ son dual de Cartier. On identifie $G(\overline{K})$ à un sous-ensemble de $A^* \otimes_{\mathscr{O}_K} \mathscr{O}_{\overline{K}}$ par l'inclusion naturelle

$$G(\overline{K}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_K-\mathrm{alg}}(A, \mathscr{O}_{\overline{K}}) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_K-\mathrm{mod}}(A, \mathscr{O}_{\overline{K}}) = A^* \otimes_{\mathscr{O}_K} \mathscr{O}_{\overline{K}}.$$

L'élément neutre $e \in G(\overline{K})$ s'identifie alors à l'unité de l'algèbre $A^* \otimes_{\mathscr{O}_K} \mathscr{O}_{\overline{K}}$. Soit $x \in G(\overline{K})$. On a alors

$$x \in G^a_{\mathrm{rn}}(\overline{K}) \Leftrightarrow (x-e)(A) \subset \mathfrak{m}_a \Leftrightarrow x \in 1 + \mathfrak{m}_a A^*. \tag{2.1.1}$$

Proposition 2.2. *Pour tout $a \geq 0$, on a $G^a_{\mathrm{rn}}(\overline{K}) \subset G^a_{AS}(\overline{K})$. En particulier, la filtration de ramification inférieure naïve de G est séparée.*

Démonstration. Supposons $G = \mathrm{Spec}(A)$. Soient

$$i : \mathrm{Spf}(A) \hookrightarrow \mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(\mathscr{O}_K < x_1, \cdots, x_d >)$$

un plongement, $\mathfrak{X}^a_K$ le a-ième voisinage tubulaire de $\mathrm{Spf}(A)$ dans $\mathfrak{X}_K$. D'après [AS03, Lemma 1.9], il existe un morphisme de groupes $G(\mathscr{O}_{\overline{K}}/\mathfrak{m}_a) \to \pi_0(\mathfrak{X}^a_{\overline{K}})$, tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} G(\overline{K}) \arrow[r] \arrow[dr] & G(\mathscr{O}_{\overline{K}}/\mathfrak{m}_a) \arrow[d] \\ & \pi_0(\mathfrak{X}^a_{\overline{K}}) \end{tikzcd} .$$

Cette proposition se déduit immédiatement des définitions de $G^a_{AS}(\overline{K})$ et $G^a_{\mathrm{rn}}(\overline{K})$. □

2.3. Filtration par les groupes de congruence. D'après Oort et Suwa, on pose, pour tout $\lambda \in \mathscr{O}_{\overline{K}}$ vérifiant $v(\lambda) \leq e/(p-1)$,

$$P_\lambda(T) = \frac{(1+\lambda T)^p - 1}{\lambda^p} \in \mathscr{O}_{\overline{K}}[T],$$

et $G_\lambda = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\overline{K}}[T]/P_\lambda(T))$. On munit G_λ d'une structure de schéma en groupes sur $\mathscr{O}_{\overline{K}}$ en définissant la comultiplication par $T \mapsto 1 \otimes T + T \otimes 1 + \lambda T \otimes T$ et l'application coinverse par $T \mapsto -\frac{1}{1+\lambda T}$. Si $v(\lambda) = 0$, G_λ est isomorphe au groupe multiplicatif μ_p ;

si $v(\lambda) = e/(p-1)$, G_λ est étale sur $\mathscr{O}_{\overline{K}}$. Suivant Raynaud, on appelle G_λ *groupe de congruence de niveau* λ. D'après la classification de Tate-Oort, tout schéma en groupes d'ordre p sur $\mathscr{O}_{\overline{K}}$ est isomorphe à un certain G_λ. Pour tout λ_1, λ_2, on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\overline{K}}}(G_{\lambda_1}, G_{\lambda_2}) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad v(\lambda_1) < v(\lambda_2), \\ \mathbb{F}_p \cdot \theta_{\lambda_1,\lambda_2} & \text{si} \quad v(\lambda_1) \geq v(\lambda_2), \end{cases}$$

où $\theta_{\lambda_1,\lambda_2}$ est donné par $\theta^*_{\lambda_1,\lambda_2}(T) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}T$. On a $\theta_{\lambda_2,\lambda_3} \circ \theta_{\lambda_1,\lambda_2} = \theta_{\lambda_1,\lambda_3}$ pour $0 \leq v(\lambda_3) \leq v(\lambda_2) \leq v(\lambda_1) \leq e/(p-1)$. Pour tout λ, on pose $\theta_\lambda = \theta_{\lambda,1} : G_\lambda \to G_1 \simeq \mu_p$.

Soient G un schéma en groupes fini plat sur $\mathscr{O}_K$ tué par p, G^D son dual de Cartier. Pour tout $\lambda \in \mathscr{O}_{\overline{K}}$ vérifiant $v(\lambda) \leq e/(p-1)$, θ_λ induit un homomorphisme de groupes

$$\theta_\lambda(G) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\overline{K}}}(G^D, G_\lambda) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\overline{K}}}(G^D, \mu_p) = G(\overline{K}).$$

Le morphisme $\theta_\lambda(G)$ est injectif, et son image est un sous-groupe de $G(\overline{K})$ invariant sous l'action de $\mathscr{G}_{\overline{K}}$, qui ne dépend que de $v(\lambda)$. L'adhérence schématique de cette image est un sous-schéma en groupes fermé de G fini et plat sur $\mathscr{O}_K$; on le note $G^{v(\lambda)}_{\mathrm{cong}}$. On appelle $(G^a_{\mathrm{cong}}, a \in [0, e/(p-1)] \cap \mathbb{Q})$ *filtration par les groupes de congruence de* G.

Proposition 2.4 ([Far09] Prop. 4)**.** *Soit G un schéma en groupes fini et plat sur $\mathscr{O}_K$ tué par p. On a*

$$G^a_{\mathrm{rn}} = \begin{cases} 0 & si \quad a > e/(p-1); \\ G^a_{\mathrm{cong}} & si \quad 0 \leq a \leq e/(p-1). \end{cases}$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la description (2.1.1) de $G^a_{\mathrm{rn}}(\overline{K})$. □

Proposition 2.5. *Soit G un schéma en groupes fini plat sur $\mathscr{O}_K$ et tué par p. Alors sous l'accouplement parfait*

$$G(\overline{K}) \times G^D(\overline{K}) \to \mu_p(\overline{K}),$$

on a pour tout $a \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$

$$G^{a+}_{AS}(\overline{K})^\perp = \begin{cases} G^D(\overline{K}) & si\ a > ep/(p-1) \\ (G^D)^{\frac{e}{p-1} - \frac{a}{p}}_{\mathrm{cong}}(\overline{K}) & si\ 0 \leq a \leq ep/(p-1). \end{cases}$$

Cette proposition a été démontrée d'abord dans [Ti06, Thm. 1.6] en utilisant une résolution de G par des schémas abéliens et la filtration de Bloch-Kato sur les faisceaux de cycles évanescents p-adiques. Puis L. Fargues a trouvé une démonstration élémentaire [Far09, Prop. 6]. La stratégie de Fargues est de montrer cette proposition d'abord pour tous les schémas en groupes d'ordre p ; ensuite il utilise la compatibilité aux quotients de la filtration d'Abbes-Saito pour se ramener au cas d'ordre p.

3. Sous-groupe canonique d'un groupe de Barsotti-Tate d'échelon 1

3.1. Problème du sous-groupe canonique. Soit G un groupe de Barsotti-Tate sur $\mathscr{O}_K$. Sur la fibre spéciale $G \otimes k$, on a l'homomorphisme de Frobenius dont le noyau est un schéma en groupes fini sur k. Lorsque $G \otimes k$ est ordinaire, il existe un relèvement canonique du noyau de Frobenius en un sous-schéma en groupes fermé fini et plat sur $\mathscr{O}_K$, à savoir, c'est la composante neutre du noyau de la multiplication par p de G ; ce qui équivaut à dire qu'il existe une façon canonique de relever l'isogénie du Frobenius en caractéristique 0. Le problème de sous-groupe canonique consiste alors à étendre canoniquement cette construction au cas pas nécessairement ordinaire. Plus généralement, pour un entier $n \geq 1$, on peut se demander de relever canoniquement le noyau du n-ième itéré du Frobenius de $G \otimes k$ en un sous-schéma en groupes fermé de G fini et plat sur $\mathscr{O}_K$ dont le groupe générique géométrique est libre sur $\mathbb{Z}/p^n$. Si un tel relèvement existe, on l'appelle *sous-groupe canonique de niveau* n de G.

Comme remarqué par Lubin [Lu79], ce n'est pas toujours possible qu'il existe un choix canonique des relèvements du noyau de Frobenius. Dans l'exemple 1.6, la fibre spéciale de tout sous-groupe d'ordre p de $G_1 = \mathscr{E}[p]$ connexe et plat sur $\mathscr{O}_K$ coïncide avec le noyau du Frobenius de $\mathscr{E} \otimes k$. Mais si $w \geq ep/(p+1)$ et e premier à p^2-1, le groupe de Galois $\mathscr{G}_K$ agit transitivement sur l'ensemble $G_1(\overline{K})\backslash\{0\}$; donc il n'y a pas de choix canonique pour un sous-groupe qui relève le noyau du Frobenius. Par contre, si w est assez petit (*i.e.* $w < ep/(p+1)$), ce qui signifie intuitivement que la courbe elliptique $\mathscr{E}$ est assez proche d'être ordinaire, alors le cran C de la filtration d'Abbes-Saito de G_1 est distingué des autres sous-groupes d'ordre p de G_1. C'est le sous-groupe canonique qu'on cherchait. Si w est encore plus petit (*i.e.* $w < e/(p+1)$), le sous-groupe C_2 est un relèvement canonique du noyau du 2-ième itéré de Frobenius de $\mathscr{E} \otimes k$ tel que $C_2(\overline{K})$ soit un $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$-module libre de rang 1, *i.e.* C_2 est un sous-groupe canonique de niveau 2 de $\mathscr{E}$. Dans cette section, on commerce par introduire, pour un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon 1 sur $\mathscr{O}_K$, un invariant généralisant w ; et puis on explique des résultats généraux sur l'existence des sous-groupes canoniques.

3.2. On note $v_p : \mathscr{O}_K/p \to [0,1]$ la valuation p-adique tronquée (avec $v_p(0) = 1$). Soient G un sous-groupe de Barsotti-Tate d'échelon 1 non-étale sur $\mathscr{O}_K$, $G_1 = G \otimes_{\mathscr{O}_K} (\mathscr{O}_K/p)$. Alors l'algèbre de Lie de G_1, notée $\mathrm{Lie}(G_1)$, est un $(\mathscr{O}_K/p)$-module libre de rang $d \geq 1$. L'homomorphisme de Verschiebung $V_{G_1} : G_1^{(p)} \to G_1$ induit une application semi-linéaire $\varphi_{G_1} : \mathrm{Lie}(G_1) \to \mathrm{Lie}(G_1)$. Soit U une matrice de φ_{G_1}. On note $h(G) = v_p(\det(U))$ et on l'appelle *hauteur de Hodge* de G_1. On vérifie facilement que cette définition ne dépend pas du choix de la matrice U. La hauteur de Hodge est un analogue de l'invariant de Hasse en caractéristiques mixtes. En effet, $h(G) = 0$ si et seulement si G_1 est ordinaire. Dans l'exemple 1.6, on peut montrer que $h(\mathscr{E}[p]) = \min\{1, v_p(\alpha)\}$.

Proposition 3.3 ([Far09], Prop. 2)**.** *Soit G^D le dual de Cartier de G. On a $h(G) = h(G^D)$.*

Démonstration. Soient $\mathbf{M}(G_1)$ l'évaluation du cristal de Dieudonné (contra-variant) de G_1 en PD-immersion triviale $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\overline{K}}/p) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\overline{K}}/p)$ [BBM, 3.3.6], ω_{G_1} le module des différentielles invariantes de G_1. Alors on a des suites exactes courtes

$$0 \to \omega_{G_1} \to \mathbf{M}(G_1) \to \mathrm{Lie}(G_1^D) \to 0,$$

appelée la filtration de Hodge sur $\mathbf{M}(G_1)$ [BBM, 3.3.5], et la filtration conjuguée

$$0 \to \mathrm{Lie}(G_1^D)^{(p)} \to \mathbf{M}(G_1) \to \omega_{G_1}^{(p)} \to 0$$

qui est obtenue en appliquant le foncteur de Dieudonné à la suite exacte courte de schémas en groupes finis et plats $0 \to \mathrm{Ker}(F_{G_1}) \to G_1 \to \mathrm{Ker}(V_{G_1}) \to 0$, où F_{G_1} et V_{G_1} signifient respectivement le Frobenius et le Verschiebung de G_1 [BBM, 4.3.1, 4.3.6 et 4.3.11]. De plus, par fonctorialité des modules de Dieudonné, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& \omega^{(p)}_{G_1} \arrow[d] & \omega_{G_1} \arrow[r, "\widetilde{\varphi}^*_{G_1}"] \arrow[d] & \omega^{(p)}_{G_1} \arrow[d] & \\
{} \arrow[r] & \mathbf{M}(G_1)^{(p)} \arrow[r, "F^*_{G_1}"] \arrow[d] & \mathbf{M}(G_1) \arrow[r, "V^*_{G_1}"] \arrow[d] \arrow[ur] & \mathbf{M}(G_1)^{(p)} \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
& \mathrm{Lie}(G_1^D)^{(p)} \arrow[r, "\widetilde{\varphi}_{G_1^D}"] \arrow[ur, hook] & \mathrm{Lie}(G_1^D) & \mathrm{Lie}(G_1^D)^{(p)} &
\end{tikzcd},$$

où $F^*_{G_1}$ et $V^*_{G_1}$ sont respectivement des morphismes induits par F_{G_1} et V_{G_1}, $\widetilde{\varphi}_{G_1^D}$ est la linéarisation de $\varphi_{G_1^D}$, et $\widetilde{\varphi}^*_{G_1}$ est le transposé de $\widetilde{\varphi}_{G_1}$ par le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_K/p}(\_, \mathscr{O}_K/p)$. Par la définition de $h(G)$, il est facile de voir que

$$h(G) = \min\{1, \frac{1}{e}\lg\Big(\mathrm{Lie}(G_1)/\widetilde{\varphi}_{G_1}(\mathrm{Lie}(G_1)^{(p)})\Big)\} = \min\{1, \frac{1}{e}\lg\Big(\omega^{(p)}_{G_1}/\widetilde{\varphi}^*_{G_1}(\omega_{G_1})\Big)\},$$

où $\lg(\_)$ signifie la longueur d'un $(\mathscr{O}_K/p)$-module fini. D'autre part, le diagramme commutatif ci-dessus implique que

$$\begin{aligned} h(G) &= \min\{1, \frac{1}{e}\lg\Big(\mathbf{M}(G_1)/(\omega_{G_1} + \mathrm{Lie}(G_1^D)^{(p)})\Big)\} \\ &= \min\{1, \frac{1}{e}\lg\Big(\mathrm{Lie}(G_1^D)/\widetilde{\varphi}_{G_1^D}(\mathrm{Lie}(G_1^D)^{(p)})\Big)\} = h(G^D). \end{aligned}$$

Cece montre la proposition. □

Remarque 3.4. Dans [AM04] et [Ti06], la hauteur de Hodge de G a été définie comme étant $h(G^D)$; ce qui est égale à $h(G)$ grâce à 3.3. Dans [Far09], $h(G)$ est noté $\mathrm{Ha}(G)$ et appelé l'invariant de Hasse. On note aussi que Conrad a défini l'invariant de Hasse comme $p^{-h(G)}$ [Co05, 2.3.1], et il a montré la proposition 3.3 lorsque G est le noyau de la multiplication par p d'un schéma abélien [Co05, 2.3.4]. La preuve de Conrad et celle de Fargues sont essentiellement toutes la même que celle présentée ici.

Théorème 3.5 ([Ti06], Thm. 1.4)**.** *Soient G un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon 1, $d = \dim_k \mathrm{Lie}(G \otimes k) \geq 1$, $j = e/(p-1)$. Supposons $p \geq 3$ et $h(G) < 1/p$. Alors*
(i) *le cran G^{j+}_{AS} est localement libre de rang p^d sur $\mathscr{O}_K$;*
(ii) *la fibre spéciale de G^{j+}_{AS} coïncide avec le noyau du Frobenius de $G \otimes k$.*

L'énoncé (i) est déjà montré dans [AM04] pour G égale au noyau de la multiplication par p d'un schéma abélien sur $\mathscr{O}_K$. Dans [Ti06], on généralise leur résultat au cas général en utilisant une résolution de G par des schémas abéliens comme faisceaux fppf sur $\mathscr{O}_K$, dont l'existence est assurée par un théorème de Raynaud [BBM, 4.1]. Pour la seconde partie du théorème, on utilise la proposition 2.5 pour montrer que $\dim_k \mathrm{Lie}(G^{j+}_{AS}\otimes k)\geq d$, puis un argument général sur les schémas en groupes sur k nous permet de conclure. Cette approche est inspirée par Andreatta-Gasbarri [AG07], qui ont donné une autre construction des sous-groupes canoniques pour une famille de schémas abéliens paramétrisée par un schéma formel sur $\mathscr{O}_K$.

Le théorème 3.5 est maintenant beaucoup amélioré par L. Fargues.

Théorème 3.6 ([Far09] Théo. 4)**.** *Soit G un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon 1 sur $\mathscr{O}_K$ de hauteur h et de dimension d avec $1<d<h$. Supposons que $p\geq 3$ et la hauteur de Hodge $w=h(G)$ soit strictement inférieure à $1/2$ si $p\geq 5$ et $w=h(G)$ strictement inférieure à $1/3$ si $p=3$.*

(i) *Pour tout $\frac{ew}{p-1}<a\leq\frac{e(1-w)}{p-1}$, le groupe G^a_{rn} est de rang p^d et le groupe $(G^D)^a_{\mathrm{rn}}$ est de rang p^{h-d}, indépendant de a.*

(ii) *Notons C (resp. E) le cran de la filtration de ramification naïve de G (resp. de G^D) de rang p^d (resp. de rang p^{h-d}). Alors on a $E=(G/C)^D$. En particulier, pour tout $\frac{epw}{p-1}<a\leq\frac{ep(1-w)}{p-1}$, on a $C=G^a_{AS}$ et $E=(G^D)^a_{AS}$.*

(iii) *Pour tout $\epsilon\in\mathbb{Q}_{>0}$, on note $\mathscr{O}_{K,\epsilon}$ le quotient de $\mathscr{O}_K$ par l'idéal formé des éléments de $\mathscr{O}_K$ dont la valuation p-adique est supérieure ou égale à ϵ. Alors le groupe $C\otimes\mathscr{O}_{K,1-w}$ (resp. $E\otimes\mathscr{O}_{K,1-w}$) coïncide avec le noyau de l'homomorphisme de Frobenius de $G\otimes\mathscr{O}_{K,1-w}$ (resp. de $G^D\otimes\mathscr{O}_{K,1-w}$).*

(iv) *Soient H est un sous-groupe fermé de G (resp. de G^D) fini et plat sur $\mathscr{O}_K$, ϵ un nombre rationnel vérifiant $\frac{w}{p-1}<\epsilon\leq 1-w$. Si le groupe $H\otimes\mathscr{O}_{K,\epsilon}$ coïncide avec le noyau du morphisme de Frobenius de $G\otimes\mathscr{O}_{K,\epsilon}$ (resp. de $G^D\otimes\mathscr{O}_{K,\epsilon}$), alors on a $H=C$ (resp. $H=E$).*

La démontration de Fargues pour ce théorème utilise le fait que le conoyau de l'application de Hodge-Tate d'un schéma en groupes fini plat sur $\mathscr{O}_K$ est annulé par $p^{\frac{1}{p-1}}$. Ceci dépend, d'une façon essentielle, du théorème de comparaison intégrale de Fatlings [Fal99] pour les groupes de Barsotti-Tate sur $\mathscr{O}_K$.

Définition 3.7. Soit G un groupe de Barsotti-Tate troqnué d'échelon 1 sur $\mathscr{O}_K$ vérifiant l'hypothèse du théorème 3.6, on appelle *sous-groupe canonique de G* le groupe C construit dans le théorème.

Le point (iii) de 3.6 est particulièrement important, puisqu'il nous permet de construire les sous-groupes canoniques de niveau supérieur. Pour simplifier les notations, si G est un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon $n\geq 1$ ou un groupe de Barsotti-Tate sur $\mathscr{O}_K$, on note encore $h(G)$ la hauteur de Hodge du sous-groupe $G[p]$.

Proposition 3.8 (cf. [Far09] Thm. 5)**.** *Soient G un groupe de Barsotti-Tate d'échelon $n\geq 2$ sur $\mathscr{O}_K$, i un entier vérifiant $1\leq i\leq n-1$, H un sous-groupe fermé de $G[p^i]$ fini et plat sur $\mathscr{O}_K$. Alors $p^{-(n-i)}H/H$ est un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon $n-i$. Supposons que $p\geq 3$ et $h(G)<\frac{1}{p+1}$. Soit C le sous-groupe canonique de $G[p]$ construit dans le théorème 3.6. Alors on a $h(p^{-(n-1)}C/C)=ph(G)$.*

Démonstration. On choisit un groupe de Barsotti-Tate $\mathscr{G}$ sur $\mathscr{O}_K$ tel que $G = \mathscr{G}[p^n]$. L'existence d'un groupe est assurée par [Il85]. Posons $\mathscr{G}' = \mathscr{G}/H$. On a un isomorphisme $p^{-(n-i)}H/H \simeq \mathscr{G}'[p^{n-i}]$. Ceci montre que $p^{-(n-i)}H/H$ est un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon $n-i$. Pour la seconde partie de la proposition, notons $w = h(G)$ et $G'_{n-1} = p^{-(n-1)}C/C$. Soient $\mathscr{G}$ un groupe de Barsotti-Tate tel que $\mathscr{G}[p^n] = G$, et $\mathscr{G}' = \mathscr{G}/C$. D'après 3.6(iii), $C \otimes \mathscr{O}_{K,1-w}$ est le noyau du Frobenius de $G \otimes \mathscr{O}_{K,1-w}$, *i.e.* celui de $\mathscr{G} \otimes \mathscr{O}_{K,1-w}$. L'homomorhisme canonique $\mathscr{G} \otimes \mathscr{O}_{K,1-w} \to \mathscr{G}' \otimes \mathscr{O}_{K,1-w}$ s'identifie alors au morphisme de Frobenius de $\mathscr{G} \otimes \mathscr{O}_{K,1-w}$; en particulier, on a un isomorphisme $\mathscr{G}' \otimes \mathscr{O}_{K,1-w} \simeq (\mathscr{G} \otimes \mathscr{O}_{K,1-w})^{(p)}$. On a donc

$$\mathrm{Lie}(G'_{n-1} \otimes \mathscr{O}_{K,1-w}) = \mathrm{Lie}(\mathscr{G}' \otimes \mathscr{O}_{K,1-w}) \simeq \mathrm{Lie}(G \otimes \mathscr{O}_{K,1-w})^{(p)}.$$

Par la fonctorialité de la hauteur de Hodge, on a

$$\min\{1-w, ph(G_1)\} = \min\{1-w, h(G'_1)\}.$$

On en conclut alors par l'hypothèse que $w < 1/(p+1)$. □

Théorème 3.9 (cf. [Far09] Thm. 6)**.** *Soit G un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon $n \geq 1$ sur $\mathscr{O}_K$ de hauteur h et de dimension d. Si $p = 3$ on suppose que $h(G) < \frac{1}{3^n}$, et si $p \geq 5$ on suppose que $h(G) < \frac{1}{2p^{n-1}}$. Alors il existe un unique sous-groupe fermé C_n de G fini et plat sur $\mathscr{O}_K$ satisfaisant les propriérés suivantes :*

(i) *Le groupe $C_n(\overline{K})$ est un $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-module libre de rang d.*

(ii) *Pour tout entier $1 \leq i \leq n$, soit C_i l'adhérence schématique de $C_n(\overline{K})[p^i]$ dans G. Alors le sous-groupe $C_i \otimes \mathscr{O}_{K,1-p^{i-1}h(G)}$ coïncide avec le noyau du i-ème itéré du Frobenius de $G \otimes \mathscr{O}_{K,1-p^{i-1}h(G)}$.*

Démonstration. On procède par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est vrai grâce à 3.6. Supposons donc $n \geq 2$ et que le théorème soit vrai pour les groupes de Barsotti-Tate groupes d'échelon $n-1$. Soient $G_i = G[p^i]$ pour tout entier $1 \leq i \leq n$, C le sous-groupe canonique de G_1, et $G'_{n-1} = p^{-(n-1)}C/C$. D'après la proposition 3.8, G'_{n-1} est un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon $n-1$ avec $h(G'_{n-1}) = ph(G)$. Appliquant l'hypothèse de récurrence à G'_{n-1}, on obtient un unique sous-groupe C'_{n-1} de G'_{n-1} tel que les conditions (i) et (ii) soient vérifiées pour C'_{n-1}. Par les unicités de C et de C'_{n-1}, on voit que le sous-groupe C_n, s'il existe, ne peut être que l'image réciproque de C'_{n-1} dans $p^{-(n-1)}C \subset G$. Il reste donc à vérifier qu'un tel choix de C_n satisfait les conditions (i) et (ii). Pour tout entier $1 \leq i \leq n-1$, notons $G'_i = G'_{n-1}[p^i]$ et C'_i l'adhérence schématique de $C'_{n-1}(\overline{K})[p^i]$ dans G'_{n-1}.

Sous-lemme 3.9.1. *Sous les hypothèses précédente, on a $C'_{n-1}(\overline{K}) \cap (G_1/C)(\overline{K}) = 0$ dans $G'_{n-1}(\overline{K})$.*

Preuve du sous-lemme. Il suffit de montrer que $C'_1(\overline{K}) \cap (G_1/C)(\overline{K}) = 0$, car G_1/C est tué par p. Par l'hypothèse de récurrence pour C'_{n-1}, C'_1 est le sous-groupe canonique de G'_1. Alors le théorème 3.6(i) implique que $C'_1(\overline{K}) = (G'_1)_{\mathrm{rn}}^{\frac{eh(G'_1)}{p-1}+}(\overline{K})$. Puisque la filtration de ramification naïve est compatible aux sous-groupes, on a

$$(G_1/C)(\overline{K})\cap C_1'(\overline{K})=(G_1/C)_{\mathrm{rn}}^{\frac{eh(G_1')}{p-1}+}(\overline{K}).$$

D'autre part, le théorème 3.6(ii) implique que $C=G_{1,AS}^{\frac{eph(G_1)}{p-1}+}$. Donc d'après 1.4(i), on a

$$(G_1/C)_{AS}^{\frac{eph(G_1)}{p-1}+}(\overline{K})=0.$$

Le sous-lemme se déduit alors de la proposition 2.2 et du fait que $h(G_1')=ph(G_1)$. □

Revenons à la preuve de 3.9. Le morphisme canonique

$$p^{-(n-1)}C\hookrightarrow G\xrightarrow{\times p}G_{n-1}$$

induit un homomorphisme $\psi : G'_{n-1}\to G_{n-1}$ dont le noyau est G_1/C. On a un diagramme commutatif de suites exactes courtes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C(\overline{K}) & \longrightarrow & C_n(\overline{K}) & \longrightarrow & C'_{n-1}(\overline{K}) & \longrightarrow & 0\\
 & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \psi|_{C'_{n-1}}} & & \\
0 & \longrightarrow & G_1(\overline{K}) & \longrightarrow & G_n(\overline{K}) & \xrightarrow{\times p} & G_{n-1}(\overline{K}) & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

où les deux flèches verticales à gauche sont des inclusions naturelles. Le sous-lemme ci-dessus implique que la droite flèche verticale est aussi injective ; c'est-à-dire qu'on a

$$C_n(\overline{K})[p]=C_n(\overline{K})\cap G_1(\overline{K})=C(\overline{K}).$$

Comme $C_n(\overline{K})$ est un $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-module fini de longueur nd et $C_n(\overline{K})[p]$ de longueur d, on en conclut que $C_n(\overline{K})$ est libre de rang d sur $\mathbb{Z}/p^n$. Ceci vérifie la condition (i) pour C_n. On remarque que $C_1=C$, donc la condition (ii) pour $i=1$ est satisfaite grâce au 3.6(iii). Comme dans la preuve de 3.8, on choisit un groupe de Barsotti-Tate $\mathscr{G}$ sur $\mathscr{O}_K$ tel que $\mathscr{G}[p^n]=G$, et on pose $\mathscr{G}'=\mathscr{G}/C$. On a $G'_{n-1}=\mathscr{G}'[p^{n-1}]$. Pour $1\leq i\leq n-1$, il est clair que C_{i+1} est le noyau de l'isogénie surjective composée $\mathscr{G}\to\mathscr{G}'\to\mathscr{G}'/C_i'$. Par 3.6(iii), l'isogénie canonique

$$\mathscr{G}\otimes\mathscr{O}_{K,\epsilon}\to\mathscr{G}'\otimes\mathscr{O}_{K,\epsilon}$$

s'identifie au morphisme de Frobenius de $\mathscr{G}\otimes\mathscr{O}_{K,\epsilon}$ pour tout nombre rationnel $0<\epsilon\leq 1-h(G)$. Par l'hypothèse de récurrence, l'isogénie

$$\mathscr{G}'\otimes\mathscr{O}_{K,1-p^ih(\mathscr{G}')}\to(\mathscr{G}'/C_i')\otimes\mathscr{O}_{K,1-p^ih(\mathscr{G}')}$$

s'identifie au i-ème itéré du Frobenius. Comme $h(\mathscr{G}')=ph(G)$, donc l'isogénie composée

$$\mathscr{G}\otimes\mathscr{O}_{K,1-p^{i+1}h(G)}\to\mathscr{G}'\otimes\mathscr{O}_{K,1-p^{i+1}h(G)}\to(\mathscr{G}'/C_i')\otimes\mathscr{O}_{K,1-p^{i+1}h(G)}$$

est le $(i+1)$-ème itéré du Frobenius, *i.e.* $C_{i+1}\otimes\mathscr{O}_{K,1-p^{i+1}h(G)}$ coïncide avec le noyau du $(i+1)$-ème itéré du Frobenius de $G\otimes\mathscr{O}_{K,1-p^{i+1}h(G)}$. □

Par l'unicité du sous-groupe C_n dans ce théorème, on obient facilement le corollaire suivant en appliquant successivement la proposition 3.8.

Corollaire 3.10. *Sous les notations et hypothèses de 3.9, pour tout entier* $1 \leq i \leq n$*,* $p^{-(n-i)}C_i/C_i$ *est un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon* $n-i$ *avec la hauteur de Hodge égale à* $p^i h(G)$*, et* C_n/C_i *est l'unique sous-groupe de* $p^{-(n-i)}C_i/C_i$ *donné par le théorème 3.9.*

Remarque 3.11. Si $p \geq 5$, Fargues [Far09, Théo. 6] montre que le sous-groupe C_n est un cran de la filtration de Harder-Narasimhan de G. Mais j'ignore si C_n est un cran de la filtration d'Abbes-Saito (ou la filtration de ramification naïve) de G. Par les fonctorialités des filtrations et le théorème 3.6, on a des inclusisons

$$G_{\mathrm{rn}}^{\frac{eh(G)}{p-1}+} \subset C_n \subset G_{AS}^{\frac{ep(1-h(G))}{p-1}}.$$

Une devine naturelle est donc que les trois groupes sont tous égaux.

Références

[AM04] A. Abbes et A. Mokrane, Sous-groupes canoniques et cycles évanescents p-adiques pour les variétés abéliennes, *Publ. Math. Inst. Hautes Étud. Sci.* **99** (2004), 117-162.

[AS02] A. Abbes and T. Saito, Ramification of local fields with imperfect residue fields, *Am. J. Math.* **124** (2002), 879-920.

[AS03] A. Abbes and T. Saito, Ramification of local fields with imperfect residue fields II, *Documenta Math. Extra volume dedicated to Kazuya Kato on the occasion of his 50 birthday*, (2003), 5-72.

[AG07] F. Andreatta and C. Gasbarri, The canonical subgroup for families of abelian varieties, *Compos. Math.* **143** (2007), 566-602.

[BBM] P. Berthelot, L. Breen and W. Messing, Théorie de Dieudonné Cristalline II, Lecture notes in Math. **930**, Springer-Verlag, (1982).

[Co05] B. Conrad, Higher-level canonical subgroups in abelian varieties, prépulication (2005).

[Fal99] G. Faltings, Integral crystalline cohomology over very ramified valuation rings, *J. Amer. Math. Soc.* **12** (1999), 117-144.

[Far09] L. Fargues (avec la collaboration de Y. Tian), Le sous-groupe canonique des groupes de Barsotti-Tate tronqués d'échelon quelconque, prépulication (2009).

[Il85] L. Illusie, Déformations de groupes de Barsotti-Tate (d'après Grothendieck), in *Seminar on arithmetic bundles : the Mordell Conjecture*, Astérisque **127** (1985), 151-198.

[Ka73] N. Katz, p-adic properties of modular schemes and modular forms, in *Modular Functions of One Variable III*, Lecture notes in Math. **350**, Springer-Verlag, (1973).

[Lu79] J. Lubin, Canonical subgroups of formal groups, *Tran. Amer. Math. Soc.* **251** (1979), 103-127.

[Ti06] Y. Tian, Canonical subgroups of Barsotti-Tate groups, prépublication (2006), à paraitre dans *Ann. Math.*